Álgebra Linear

2006/1

EX1: Seja $W \subset I\!R^3$ um plano passando pela origem.

(i) Se $F \subset I\!R^3$ é um *outro* plano passando pela origem, determine $W+F$.

Resp:

Como W é um plano sabemos que existem dois vetores w_1 e w_2 não colineares (ou seja, linearmente independentes) que geram W (ou seja, $W = [w_1, w_2]$).

Sendo F um plano do espaço distinto de W, podemos supor que F é gerado por dois vetores não colineares v_1 e v_2, onde pelo menos um deles não está no plano W (caso contrário seriam o mesmo plano!).

Sabendo que $W+F$ é gerado pelo conjunto de vetores $\{w_1, w_2, v_1, v_2\}$ e que 3 deles são não coplanares, obtemos que $W+F$ obrigatoriamente é o $I\!R^3$ (de fato, como $\dim I\!R^3 = 3$, três vetores LI já formam uma base para esse espaço).

Observe que se F fosse uma reta não contida no plano W o resultado seria o mesmo.

(ii) Se $S = [u]$, onde u é um vetor não nulo do $I\!R^3$ o que podemos dizer de $W \cap S$?

Resp:

Se $S = [u]$ com u não nulo, então S é uma reta no espaço passando pela origem. Logo $W \cap S$ depende da posição da reta em relação ao plano W.

Se S está contida no plano (ou de forma equivalente, se $u \in W$), então $W \cap S = S$. Se S não está contida no plano (ou de forma equivalente, se $u \notin W$), então $W \cap S = \{(0,0,0)\}$ (Lembre-se que todos os subespaços do $I\!R^3$ possuem a origem.)

EX2: Sejam

$$W_1 = \{(x,y,z,t) \in I\!R^4 \ / \ x+y=0 \text{ e } t-2z=0\}$$

e

$$W_2 = \{(x,y,z,t) \in I\!R^4 \ / \ 2x-y+z+t=0\}$$

subespaços de $I\!R^4$.

(i) Determine uma base para $W_1 + W_2$ e dê sua dimensão.

(ii) Determine uma base para $W_1 \cap W_2$ e dê sua dimensão.

(iii) $W_1 + W_2 = I\!R^4$?

Resp:

(i) Para determinarmos uma base para $W_1 + W_2$ devemos antes determinar bases para W_1 e W_2. Resolvendo o sistema linear homogêneo que define W_1 obtemos:

$$W_1 = \{\, (-y, y, z, 2z) \,/\, y, z \in I\!R \,\}$$

e portanto $B_1 = \{(-1,1,0,0), (0,0,1,2)\}$ gera W_1 e sendo também LI (veja observação abaixo) é uma base para tal subespaço.
Resolvendo o sistema que define W_2 obtemos:

$$W_2 = \{\, (x, 2x + z + t, z, t) \,/\, x, z, t \in I\!R \,\}$$

e portanto $B_2 = \{(1,2,0,0), (0,1,1,0), (0,1,0,1)\}$ gera W_2 e sendo também LI (veja observação abaixo) é uma base para tal subespaço.
Sendo assim, temos que:

$$B_1 \cup B_2 = \{\, (-1,1,0,0), (0,0,1,2), (1,2,0,0), (0,1,1,0), (0,1,0,1) \,\}$$

é um conjunto gerador do subespaço $W_1 + W_2$. Como em geral essa união não é LI temos que aplicar o método do escalonamento da matriz cujas linhas são os vetores de $B_1 \cup B_2$ para determinarmos uma base. Observe que, sendo $W_1 + W_2$ um subespaço vetorial do $I\!R^4$, a sua dimensão não pode ser maior que 4 e portanto, com certeza nesse caso $B_1 \cup B_2$ é LD.
Após um escalonamento da matriz obtemos a base:

$$B = \{\, (-1,1,0,0), (0,1,1,0), (0,0,1,2), (0,0,0,6) \,\}$$

de onde concluímos que $\dim W_1 + W_2 = 4$.

(ii) Temos que $W_1 \cap W_2$ é o conjunto solução do sistema linear homogêneo:

$$\begin{cases} x + y &= 0 \\ t - 2z &= 0 \\ 2x - y + z + t &= 0 \end{cases}$$

Resolvendo via eliminação gaussiana tal sistema obtemos que:

$$W_1 \cap W_2 = \{(-z, z, z, 2z) \,/\, z \in I\!R\}$$

e portanto $\{(-1,1,1,2)\}$ é uma base para tal subespaço.
Sendo assim, $\dim W_1 \cap W_2 = 1$, o que já era esperado, pois:

$$\dim W_1 \cap W_2 = \dim W_1 + \dim W_2 - \dim(W_1 + W_2) = 2 + 3 - 4 = 1$$

(iii) Sim, pois $W_1 + W_2$ é subespaço vetorial do $I\!R^4$ com a mesma dimensão do $I\!R^4$.

OBSERVAÇÕES:

(1) Para mostrar que dois vetores são LI, basta verificar se não são múltiplos escalares. Para o caso de três ou mais vetores devemos usar a definição ou, no caso de vetores do $I\!R^n$, colocá-los nas linhas de uma matriz, escaloná-la e verificar se nenhuma linha foi anulada.

(2) As bases encontradas no segundo exercício não são as únicas possíveis. Tirando o subespaço nulo, todo espaço vetorial possui infinitas bases distintas (lembrando que **base** é o **conjunto que gera e é LI**; não confunda **base** com um **elemento da base**).

(3) Sempre resolva os sistemas lineares pelo método da eliminação gaussiana (visto em aula) para evitar erros.

(4) Ao resolver um exercício, seja em lista ou em prova, justifique ao máximo as suas contas e afirmações, pois isso facilita e torna mais justa a correção.

Patricia H. A. S. Nogueira (DEMAC-FAT) (*patricia@fat.uerj.br*)